

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 1

1. Przedstaw w postaci algebraicznej liczby zespolone:

$$(3 + 2j)(5 - 2j), \quad \frac{3-j}{1+j}, \quad (5 + 2j)^2, \quad (3 + 2j)^3, \quad \frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}$$

2. Narysuj zbiory punktów na płaszczyźnie:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z = 2, \quad \operatorname{Im} z = -5, \quad |z - (1 - j)| = 2, \\ |z - j| \leq 2, \quad |z + j| \geq 1, \quad |z + 1| + |z - 1| = 2 \end{aligned}$$

3. Rozwiąż równania:

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 5 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0, \quad z^2 = j, \\ z^2 + 2(1 + j)z + 2j = 0, \quad z^2 + (1 + 4j)z - (5 + j) = 0 \end{aligned}$$

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby zespolone:

$$-1, \quad j, \quad -j, \quad \sqrt{3} + j, \quad \frac{\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}, \quad (-1 + j)^{12}, \quad \frac{(1-j)^6}{(\sqrt{3}+j)^3}$$

5. Oblicz pierwiastki zespolone 3-ciego stopnia z liczb:

$$-1, \quad j, \quad -j, \quad 1 + j\sqrt{3}, \quad \frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}$$

6. Oblicz:

$$\frac{(1+j)^{12}(-j)^{10}}{(\sqrt{3}+j)^2(1-j\sqrt{3})^4}, \quad \frac{(\sqrt{3}+j)^5(1-\sqrt{3}j)^4}{(\sqrt{3}-j)^7(1+\sqrt{3}j)^5}$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 2

1. Rozwiąż równania:

$$z^5 = 1, \quad z^4 = \frac{(1+j)^3}{1-j}, \quad z^5 = \frac{(1+j)^3}{(1-j)^4}$$

2. Następujące liczby przedstaw w postaci wykładniczej:

$$z = -j, \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j, \quad z = -\frac{7}{\sqrt{2}} + j\frac{7}{\sqrt{2}}$$

3. Rozłóż na czynniki o współczynnikach rzeczywistych i zespolonych następujące wielomiany:

$$z^4 - 1, \quad z^2 + z + 1, \quad z^4 + 1, \quad z^4 - 2z^2 - 3, \quad jz^2 - z + 2j \text{ tylko zesp.}$$

4. Rozłóż na ułamki proste funkcję wymierną:

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - z + 2}{z^4 - 1} \quad \text{o współcz. rzecz. i zesp.}$$

$$g(z) = \frac{4z}{z^4 - 4} \quad \text{o współcz. rzecz.}$$

$$h(z) = \frac{z - 1 - 5j}{z^2 - 2z + 2} \quad \text{o współcz. zesp.}$$

5. Przedstaw w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych rzeczywistych funkcję wymierną:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

1. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

obliczyć (o ile istnieje): $A \cdot B$, $B \cdot A$, $2A + C$, $A \cdot B^T$, $B + 2C^T$, $A - C$, $A^T \cdot C$.

2. Obliczyć iloczyny $A \cdot (B \cdot C)$ oraz $(A \cdot B) \cdot C$ następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} j & j+1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} j+1 & 2 \\ 4 & j-1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Dla jakich wartości parametru $x \in \mathbb{R}$ macierz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

jest osobliwa ?

5. Sprawdzić, że $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ na przykładzie macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Obliczyć macierze odwrotne A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 4

1. Dane są następujące wektory:

$$A = [1, 2], \quad B = [2, 3], \quad C = [1, 2, 3], \quad D = [3, 5, 6],$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić liniową niezależność układów wektorów:

$$\{A, B\}, \quad \{C, D\}, \quad \{E, F\}, \quad \{E, F, G\}.$$

2. Wyznaczyć rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Rozwiązać równanie macierzowe $A \cdot X = B$,

$$\text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Metodą macierzową i wyznacznikową rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

5. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 5

1. Podać warunek rozwiązalności i rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}, \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \begin{cases} -x + 2y + az = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ ay + z = a \end{cases}$$

2. Czy wektor $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ jest kombinacją liniową wektorów

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ?$$

3. Spośród wektorów $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

wybrać trzy wektory liniowo niezależne, a pozostały wektor zapisać jako kombinację liniową wybranych wektorów.

4. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $u = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

oraz wektor w będący rzutem prostopadłym wektora u na kierunek wektora v .

5. Sprawdzić, czy wektory $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ są prostopadłe. Znaleźć

wektor prostopadły (jednocześnie) do u i do v .

6. Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$ oraz długość wysokości h_B z wierzchołka B .

7. Dobrać wartość parametru $t \in \mathbb{R}$ tak aby punkty $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(2 + 2t, 1 + t, -1 + t)$ były wierzchołkami trójkąta:

- a) prostokątnego
- b) równoramiennego.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 6

1. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(0, 1, 0)$, $B(3, 3, 5)$, $C(1, 3, -1)$.
2. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(1, -1, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzn: $\pi_1 : x - y + z = 1$, $\pi_2 : 2x + y + z = -1$.
3. Przez punkt $A(1, 1, 2)$ poprowadzić prostą przecinającą prostą $l : x = -1 + t, y = 1 - t, z = 2 + 2t$ pod kątem prostym.
4. Sprawdzić, czy proste l_1, l_2 są równoległe, jeśli
$$l_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}.$$
5. Znaleźć odległość punktu $P(1, 2, 1)$ od prostej $l : \begin{cases} y = 2z + 1 \\ z = 2x \end{cases}$ oraz rzut prostopadły punktu P na prostą l .
6. Znaleźć odległość między prostymi l_1 i l_2 , jeżeli:
 - a) $l_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}, \quad l_2 : \frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$
 - b) $l_1 : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$
 - c) $l_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad l_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
7. Znaleźć równanie rzutu prostopadłego prostej $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{5}$ na płaszczyznę $\pi : 2x - 5y + z - 2 = 0$ oraz kąt między prostą l i płaszczyzną π .
8. Znaleźć objętość ostrosłupa utworzonego przez punkty $A(0, 1, 0)$, $B(3, 3, 5)$, $C(1, 3, -1)$, $D(2, 4, 3)$ oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka D .

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 7

1. Obliczyć granice ciągów o podanym wyrażeniu ogólnym:

$$\frac{2n^3-n+1}{3n^3+2n+1}, \quad \frac{-2n^2+n+1}{3n^3+2n+2}, \quad \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}, \quad \frac{n \cdot \sin n!}{n^2+1}, \quad \sqrt{n^2+1} - n$$

$$\sqrt{2^n+5^n}, \quad \sqrt{n^2+n} - n, \quad -3n^3+2n+1, \quad \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}, \quad \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \left(1+\frac{4}{n}\right)^n, \quad \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$$

2. Obliczyć sumę szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

3. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{2n+1}\right)^n$$

4. Stosując kryterium porównawcze, zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{3n^3+2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}-\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2-1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

5. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(n-1)\pi]}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{n \cdot 5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 8

1. Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych oraz zbadać zbieżność na krańcach przedziału:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x-4)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} (x-5)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + \frac{1}{4^n}} - n \right) x^n.$$

2. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - 3x + 1)^n$ jest zbieżny ?

3. Znaleźć obszar zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(x-2)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2 x^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2(x-3)^n}.$$

4. Przedstawić w postaci szeregu potęgowego następujące funkcje oraz wyznaczyć obszar zbieżności poszczególnych szeregów:

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad g(x) = \frac{2}{3+2x}, \quad h(x) = \frac{2}{4-x^2}.$$

5. Nie używając pochodnych, obliczyć granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x-1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right).$$

6. Wyprowadzić wzory na pochodne funkcji: $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arsinh} x$.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 9

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = \sinh^2 3x, \quad g(x) = x^2 \cosh x, \quad h(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$$

$$p(x) = \arcsin(\cos x), \quad q(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad r(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$$

$$u(x) = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{x}}, \quad v(x) = x^{\ln x}, \quad w(x) = \sin(\ln(\operatorname{arctg} x))$$

2. Obliczyć granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x(1 - \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-3x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3 \cos x}$$

3. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

4. Zbadać istnienie i znaleźć asymptoty funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}, \quad h(x) = \ln(1 + e^x).$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 10

1. Obliczyć całki nieoznaczone:

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-1) dx, \int \frac{5x^2+3x+1}{\sqrt{x}} dx, \int (1+\operatorname{tg}^2 x) dx, \int \left(\frac{1}{x} - 2 \sin x + 3e^x\right) dx.$$

2. Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć:

$$\int \sqrt{x} \ln x dx, \int \frac{1}{x^2} \ln x dx, \int x \operatorname{arctg} x dx, \int x^2 \cos x dx, \int x^3 e^{2x} dx, \int \sin 2x e^{3x} dx.$$

3. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć:

$$\int \sin 5x dx, \int \frac{dx}{x-a} \quad (a \in \mathbb{R}), \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int \frac{x}{1+x^4} dx$$
$$\int \frac{\ln x}{x} dx, \int \operatorname{tg} x dx, \int \sqrt{x+2} dx, \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx, \int x e^{-x^2} dx.$$

4. Obliczyć całki:

$$\int x^3 \sin(x^2) dx, \int e^{\sqrt{x}} dx, \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx, \int \arcsin x dx$$
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx, \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \int \sin^3 x dx.$$

5. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-7} dx, \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx, \int \frac{dx}{x^4-16}, \int \frac{x^5+x^4-3x}{x^2+2x} dx$$
$$\int \frac{x}{x^3-1} dx, \int \frac{2x+1}{(x-3)^4} dx, \int \frac{-x^3+4x^2+2x+7}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} dx, \int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} dx.$$

6. Obliczyć całki z trygonometryczne:

$$\int \cos^2 5x dx, \int \cos^4 x dx, \int \sin 3x \cos 5x dx, \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$
$$\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{1+\cos x}, \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}, \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

7. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych:

$$\int x \sqrt{2x+1} dx, \int \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}} dx, \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}, \int \sqrt{2x-x^2} dx, \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}, \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}.$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 11

1. Obliczyć całki oznaczone:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx, \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \, dx, \quad \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx.$$

2. Bez obliczania całek uzasadnić równość następujących całek oznaczonych:

$$\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{k\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{1}{2} \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

3. Obliczyć pole figury ograniczonej liniami:

a) $y = x^2, y = 3x$

b) parabolami $y = x^2 - x - 6$ i $y = -x^2 + 5x + 14$

c) $y = \ln x$ oraz prostymi $y = 0$ i $x = e$.

4. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły otrzymanej przez obrót dookoła osi OX wykresu funkcji:

a) $y = \sqrt{2x}, x \in [0, 2],$ b) $y = \sin x, x \in [0, \pi].$

5. Obliczyć długość łuku krzywej zadanej równaniami:

a) $y = x^2, x \in [0, 1],$ b) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, x \in [0, 8]$

c) $x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$

d) $\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = a \sin^2 t \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}], a > 0$

e) $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi], r > 0.$

6. Obliczyć całki niewłaściwe:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \, dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)x^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{x^4+1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} \, dx$$

$$\int_0^a \ln x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^a}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}.$$